数理解析研究所講究録
642巻 1988年 134-156

Construction of Discrete Series for Vector Bundles Over Semisimple Symmetric Spaces

東大理学部　小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)

Abstract　G/H を半単純対称空間とする。Flensted-Jensen, 大島-松木の結果の一般化として、rank condition が成り立つ時、H の unitary な有限次元表現に同伴した vector 束の L^2 切片に G の既約加群 (discrete series) を構成する。これらの discrete series は、Zuckerman の定義した derived functor module を用いて表示され、系として、後者の unitarizability が従う。対称空間の（普通の意味の）discrete series の場合と異なり、その parameter は必ずしも canonical Weyl chamber に属さない事が、古典型の例 ($G=Sp(p,q)$, $U(p,q)$) でみられる。

§1 序

G : 連結線型半単純 Lie 群

$G_{\mathbb{C}}$: G の複素化

σ : G の involutive automorphism.

$H:=(G^\sigma)_0$：σの固定部分群の連結成分

G/Hは半単純対称空間と呼ばれる。

G/Hには、G－不変測度$d(gH)$が存在する。

(τ, V)をHのunitaryな既約有限次元表現とする。

$L^2(G/H, \tau) := \{ f : G \to V \ ; \ f(gh) = \tau(h)^{-1} f(g), \int_{G/H} \|f(gH)\|_V^2 \, d(gH) < \infty \}$

とおけば、左正則表現$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$はunitary表現となる。

$L^2(G/H, \tau)$に実現された既約$(\mathfrak{g}, K)$-moduleをdiscrete series

と呼ぼう。（尚、便宜上、既約表現の有限直和に対しても

discrete seriesと呼ぶ）

<u>問題A</u>　$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$の既約分解を求めよ。

これは、$\tau = \mathbb{1}$（trivial表現）の時でも、G/Hが群多様体

或いは複素／実形 或いはrank 1の場合等にしか解かれて

いない。しかし、いずれにせよ、次の問題がmain stepになる

と考えられる。$\tau = \mathbb{1}$の時は、大島－松木が完全に解決した。

<u>問題B</u>　$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$にdiscrete seriesが存在するのは

いつか？　存在するならそれを決定せよ。

本稿では、更に弱く、次の問題を扱う。

問題C　適当な条件の下に、$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ の discrete series を構成せよ。

discrete series が、どの $\tau \in \hat{H}$ に対する $L^2(G/H, \tau)$ に実現されているかを explicit に書かない時は、G/H 上の G共変な主束（構造群は compact 群 又は abel 群）G/H_n ($H \triangleright H_n$) 上の L^2関数に対し、問題A, B, C を考えた方が自然である。§3では、この立場で例を扱う。(即ち、対称空間ではない、ある reductive space の discrete series を扱う事になる)。

問題Cは、Schlichtkrull [1982] が最初に扱った。本稿では、彼の方法では得られない discrete series を含む形で得られる構成として §2 の Theorem を述べる。

古典型の場合、$G = U(p, q; \mathbb{F})$, $H = U(m; \mathbb{F}) \times U(p-m, q; \mathbb{F})$ ($p \geqq 2m$) ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) の例が我々の対象となる。

この場合の discrete series は、関連する Zuckerman's derived functor module (ZDF module) の vanishing theorem, nonvanishing のための必要十分条件,（適当な条件の下での）既約性 の結果と共に Theorem A, B, C で述べられる。

§2 Discrete Series の構成

§1のnotationを用いる。更にいくつかのnotationを導入しよう。

θ : σ と可換な G の Cartan involution

$K := G^{\theta}$

$H^r (\equiv K^d)$: H の複素化の compact real form.

$G^r (\equiv G^d)$: H^r を maximal compact subgroup とする $G_{\mathbb{C}}$ の real form.

$K^r (\equiv H^d) := (K_{\mathbb{C}} \cap G^r)_0$

H が次の形に分解されているとする：

(1) $H = H_c H_n$; $\begin{cases} H_c, H_n \text{ は } H \text{ の連結な正規部分群, } H_c \subset K, \\ H_c \cap H_n \text{ は有限集合。} \end{cases}$

$H_c = \{e\}$, $H_n = H$ なら (1) は自明で、この時も定理1は成り立つが、我々の興味があるのは $H_c \neq \{e\}$ の場合である。実際、H が nontrivial な unitary 有限次元表現を持つのは、(1) で $H_c \neq \{e\}$ なる分解を持つか、又は G^d/K^d が Hermitian symmetric space となる場合に限られる。

以下、我々は (G, H) に次の仮定をおく：

(2) $\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} K/H\cap K$

(2) は、$L^2(G/H, \mathbb{1})$ に discrete series が存在するための必要十分条件である事が知られている。

<u>例</u>、$(G,H) = (SO_0(p,q), SO(m)\times SO(p-m,q))$, $(SU(p,q), S(U(m)\times U(p-m,q)))$, $(Sp(p,q), Sp(m)\times Sp(p-m,q))$ は、$p \geq 2m$ の時（但しSOなら更に $m\geq 2$）、上の (1) で $H_c \neq \{e\}$, (2) を共にみたす。

$\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{c0} + \mathfrak{h}_{n0}$ を $G,\ K,\ H = H_c \cdot H_n$ の Lie algebra とし、
その複素化を $\mathfrak{g},\ \mathfrak{k},\ \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_c + \mathfrak{h}_n$ 等と表す。
$\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}_0$ を $\{X \in \mathfrak{k}_0 : \sigma X = -X\}$ の maximal abelian subspace とおく。
$\mathfrak{m} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0) \equiv \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{a}_0] = 0\} = \mathfrak{a} \oplus Z_{\mathfrak{h}_c}(\mathfrak{a}) \oplus Z_{\mathfrak{h}_n}(\mathfrak{a})$ (∵ (2)−(3))
$\mathfrak{t}_r$: $Z_{\mathfrak{h}_c}(\mathfrak{a})$ の Cartan subalgebra
$\mathfrak{t}^c$; $\mathfrak{t} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}_r$ を含む $\mathfrak{k}$ の Cartan subalgebra
$\mathfrak{h}^c$: $\mathfrak{t}^c$ を含む $\mathfrak{g}$ の (fundamental) Cartan subalgebra としよう。
($\mathfrak{h}^c$ と $\mathfrak{h}_c$ に注意)
ルート系の (rough な) 図式:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}) \arrow[r, hook] & \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \\
\Delta(Z_{\mathfrak{h}_c}(\mathfrak{a}), \mathfrak{t}_r) \arrow[r, hook] & \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^c) \arrow[r, hook] \arrow[u, two heads] & \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^c) \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

が compatible になる様に、それぞれの positive system を fix する。
これは(3)より可能。(後に述べる G^r/P^r の K^r-closed orbit を fix した事に対応している)。
$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ とおく。
$\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}$ を $\mathfrak{a}, \mathfrak{t}$ の generic element を用いて
$\mathfrak{p} := \mathfrak{m} + \mathfrak{n},\ \mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ (Levi 分解)
で定義する。但し、$\mathfrak{h}^c$ stable な nilradical $\mathfrak{n}, \mathfrak{u}$ は、
$\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}^c) \subset \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}^c) \subset \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^c)$ をみたすものとする。
$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q},\ \mathfrak{m} \supset \mathfrak{l},\ \mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}$ である事に注意しよう。

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$は、$\mathfrak{g}$のθ-stable parabolic subalgebra ($\mathfrak{g}_0$のimaginary polarization)である。また、$\mathfrak{p}$は、G^rのあるminimal parabolic subgroup P^rのLie algebraの複素化となっている。

$\rho(\mathfrak{n})$, $\rho(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{k})$, $\rho_{\mathfrak{m}} \equiv \rho(\Delta^+(\mathfrak{m}))$を対応するrootの和の半分として定義する。

$M := Z_G(\mathfrak{a}) = N_G(\mathfrak{p})$, $L := Z_G(\mathfrak{t}) = N_G(\mathfrak{q})$ とおくと、これらは、Gのθ stableな連結reductive subgroupである。

$\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$, $\mathcal{M}(\mathfrak{m}, M\cap K)$ etc を$(\mathfrak{g}, K)$ (resp. $(\mathfrak{m}, M\cap K)$)-moduleのなすCategoryとし、j-th cohomological parabolic inductionを、$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{j} : \mathcal{M}(\mathfrak{m}, M\cap K) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ と書く。但し、'ρ-shift'は、$\mathcal{M}(\mathfrak{a}\mathfrak{g})$のtrivial表現と同じinfinitesimal characterをもつ表現を$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{j}$が保つ様に定義する (see Vogan[1981])。

$V^L(\mu)$を$\mu \in (\mathfrak{t}^c)^*$をextremal weightとする$L$の有限次元既約表現とする。但し$V^L(\mu)$が一次元の時は、$\mathbb{C}_\mu$とも書く。$L$の代わりに、$G$, Mと書く時も同様の意味とする。

$Z(\mathfrak{g})$を$\mathfrak{g}$の展開環$U(\mathfrak{g})$の中心、$\mathbb{D}(G/H)$をG/H上のG不変微分作用素全体とする。$W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)$, $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$をroot系$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)$, $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$のWeyl群とすれば、Harish-Chandra isomorphismより

$$Z(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{t}^c)^{W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)}, \quad \mathbb{D}(G/H) \simeq S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})}.$$

また、$V \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$に対し、その$(\mathfrak{g}, K)$-moduleとしてのdualを$V^\vee$と書く事にする。$V$が有限次元の時は、$V^*$とも表す。

さて、大島－松木理論は、$L^2(G/H, \mathbb{1})$ の discrete series が $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{D}(G/H), \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{a}^*/W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ と、G^r/P^r の K^r-closed orbit（有限個）によって分類される事を主張している。

$$\begin{cases} \mu \in \mathfrak{a}^* \quad \text{such that } \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \ \text{ for } {}^\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}) \\ \text{closed orbit } K^r P^r \subset G^r/P^r \end{cases}$$

に対応する discrete series を $V_\lambda \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ と表す。

$$V_\lambda \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}{}^{s}(\mathbb{C}_{\lambda - \rho(\mathfrak{n})})^\vee \qquad (s := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}))$$

なる $(\mathfrak{g}, K)$ 同型が、$\mathcal{D}$-module construction との duality theorem（[HMSW] (preprint)）から従う。（但し $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ はある lattice の元）

$V_\lambda \neq 0$ のための十分条件として、ここでは Flensted-Jensen type を用いよう。即ち、λ は、ある lattice に属し、かつ、$\lambda + \rho(\mathfrak{n}) - 2\rho(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k})$ が $\Delta^+(\mathfrak{k})$ dominant。この様な λ を fix する。（但し Theorem は $V_\lambda \neq 0$ なら成立）

G^r/P^r の各 K^r-open orbit V_i（有限個），$w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$，$S \subset G^r/P^r$ に対し、$w[S] := S\,\overline{P^r w^{-1} P^r} \subset G^r/P^r$，

$$\widetilde{W}^i(S) := \{ w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) : w[S] \cap V_i \neq \phi \}$$

$W^i(S) :=$ $\widetilde{W}^i(S)$ の中で Bruhat order が minimal な元全体

$W(S) := \bigcup_i W^i(S) \quad (\subset W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))$ とおけば、

$W(S) \neq \phi$ (if $S \neq \phi$) である。

$w \in W(K^r P^r)$ を fix する。$\widetilde{w} \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}^c)$ を、

$\widetilde{w}\sigma = \sigma\widetilde{w}$，$\widetilde{w}|_{\mathfrak{a}} = w$，$\widetilde{w}\rho_m = \rho_m$ なる unique な元として定義する。

(π, F)を$G_{\mathbb{C}}$のholomorphicな有限次元既約表現で，H_n fixed vectorを持つものとし，そのhighest weight for $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}^c)$を$b \in (\mathfrak{j}^c)^*$とする。

H_n-fixed vector $u\ (\neq 0)$を用いて，F^*は，$G_{\mathbb{C}}$の正則関数全体のなす$G_{\mathbb{C}}$左加群に次の様に$G_{\mathbb{C}}$共変に埋めこまれる。

$$
\begin{array}{cccc}
\iota_u : & F^* & \hookrightarrow & \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& v & \longmapsto & \iota_u(v)\ \ (g \longmapsto \langle \pi(g)u, v \rangle)
\end{array}
$$

$V_\lambda F^* \subset C^\infty(G)$を，$\{ v f : v \in V_\lambda,\ f \in \iota_u(F^*) \}$が$\mathbb{C}$-加群として生成する部分空間とする。(我々は，$V_\lambda \subset L^2(G/H) \cap \mathcal{A}_K(G/H, \mathcal{M}_\lambda) \hookrightarrow C^\infty(G)$と見做している)

$V_\lambda F^*$は，$(\mathfrak{g}, K) \curvearrowright C^\infty(G)$ (左正則表現)のadmissibleな$(\mathfrak{g}, K)$-submoduleである。

$$V(\lambda, \Lambda) := P_{-(\lambda+\Lambda+\rho_m)}(V_\lambda F^*) \quad とおく。$$

ここで，$\Lambda := \tilde{\omega}^{-1} b \in (\mathfrak{j}^c)^*$，$P_{-(\lambda+\Lambda+\rho_m)}$は，generalized $Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal character $-(\lambda+\Lambda+\rho_m) \in (\mathfrak{j}^c)^*$への射影作用素。

即ち，$V(\lambda, \Lambda)$は，Flensted-Jensen typeのdiscrete seriesを，H_n-fixed vectorを持つGの有限次元表現によって，orbit structureが定めるある方向に、関数空間上でZuckerman tensoringを施して得られたものである。

$\Lambda_j \in (\mathfrak{t}^c)^*$ $(j=0,1,\cdots,k)$ を,

$$\begin{cases} \Lambda_j \in \Delta(F:\mathfrak{t}^c) & (F \text{ の } \mathfrak{t}^c\text{-weight}) \\ \Lambda_j \text{ は dominant for } \Delta^+(\mathfrak{m},\mathfrak{t}^c) \\ \lambda+\Lambda_j+\rho_m \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^c)(\lambda+\Lambda+\rho_m) \end{cases}$$

を満たす元全体とする。但し $\Lambda_0 := \Lambda$ とおく。

この時, 次の定理が成り立つ。

Theorem i) $V(\lambda,\Lambda)$ は, 0でない admissible $(\mathfrak{g},K)$-module。

ii) $\tau|_{H_n} = id$ & $[F^*|_H : \tau] \neq 0$ なる任意の $\tau \in \hat{H}$ に対し,
(この様な τ は必ず存在し, H の有限次元unitary表現となる)

$$V(\lambda,\Lambda) \hookrightarrow C^\infty(G/H,\tau)$$ なる $(\mathfrak{g},K)$ homomorphism

が存在する。

iii) $\langle \lambda+\Lambda_j, \alpha \rangle > 0$ for $^\forall j$, $^\forall \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ ならば, ii)における任意の τ に対し,

$$V(\lambda,\Lambda) \hookrightarrow L^2(G/H,\tau)$$ なる $(\mathfrak{g},K)$-hom が存在する。

iv) $k=0$ ならば, $S := \dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$ とおくと,

$$\mathcal{R}_p^{\Delta}(V^L(\lambda+\Lambda-\rho(\mathfrak{n})))^\vee \simeq \mathcal{R}_q^{S}(\mathbb{C}_{\lambda+\Lambda-\rho(\mathfrak{n})})^\vee \twoheadrightarrow V(\lambda,\Lambda)$$

なる $(\mathfrak{g},K)$ homomorphism が存在する。

v) $k=0$ かつ $\lambda+\Lambda+\rho_m$ が $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^c)$ dominantならば,
iv)の写像は同型で, $V(\lambda,\Lambda)$ は既約 $(\mathfrak{g},K)$-module。

Remark 1. $V(\lambda, \Lambda)$ の構成の基本的な idea は、大島-松木が discrete series が 0 でない条件を check する時に用いたものに基づく。

Remark 2. $Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal character が singular な時も扱っているので、$k \geq 1$ となる場合がありうる。しかし、$\lambda + \rho_m$ が $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)$-strictly dominant ならば、v) の仮定の内、$k = 0$ はもう一方の仮定より従う。

尚、$k = 0$ なら、iii) の L^2-ness の仮定は critical (cf. [OM](1984))。一方、v) の既約性のための仮定は、一般論が直ちに使える強い仮定である。§3 では [Vogan](preprint) と同様に、この仮定が弱められる。

Theorem で、K^r の closed orbit on G^r/P^r, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\Lambda = \varpi^{-1} b \in (\mathfrak{t}^c)^*$ を動かす事によって、[Schlichtkrull](1982) では得られていないものを含む discrete series (0でない) を構成する事ができる。[Kobayashi](1987) では、この立場でいくつかの例を与えた。一方、別の構成として、vector 束値の場合も、'Poisson 変換' + Flensted-Jensen 同型 によって、[Oshima-Matsuki](1984) Theorem (ii) と同様の条件の下で、(0 になるかも知れないが)、$L^2(G/H, \tau)$ の discrete series が得られる。§3 の Thm A, B, C の 6) は、0 になるかどうかを別の方法で決定できるので、後者の構成を用いる。

§3 古典型の例

この節では $G = Sp(p,q)$, $U(p,q)$, $SO_0(p,q)$ の場合を扱う.

$G = Sp(p,q)$;p, $q \geq 1$ の場合。

$K = Sp(p) \times Sp(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする.

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental Cartan subalgebra とすれば $\mathfrak{h}^c \subset \mathfrak{k}$.

適当な cordinate $\{f_i;\ 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ をとれば

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j), 2f_l;\ 1 \leq i < j \leq p+q,\ 1 \leq l \leq p+q\}.$$

$$\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j), 2f_l; 1 \leq i < j \leq p \ \text{ or } \ p+1 \leq i < j \leq q,\ 1 \leq l \leq p+q\}.$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく.

$1 \leq r \leq p$ なる自然数 r をとり以後 fix する。

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \cdots, H_r \rangle \subset \mathfrak{h}^c$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, $L := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく.

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である.

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を

$$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}^c) := \{f_i \pm f_j, 2f_l;\ 1 \leq i \leq r,\ i < j \leq p+q,\ 1 \leq l \leq r\}$$ で定義する.

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra の Levi 分解を与える.

$\rho := \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{h}^c)^*$

$Q := p+q-r \ (>0)$

$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) = r(2p-r+2)$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i \in \mathfrak{t}^* \hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^*$$

Theorem A

0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の任意の θ stable parabolic subalgebra は、

K の適当な元によって、$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ に conjugate。

1) $\lambda-\rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる $\leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{Z}, \quad (1 \leq {}^\forall i \leq r)$ —①

以後 2)～6) において、すべて ① を仮定する。

2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq -Q$ —② ならば、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \qquad \text{for } {}^\forall j \neq 0.$$

3) ② の下で、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \geq -Q \\ \lambda_{r-2q} \geq Q+1 \end{array}\right\} ③$$

但し、③ の後半の条件は、$r > 2q$ の時のみ課すものとする。

4) ③ における $\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達は $(\mathfrak{g},K)$ module として、 pairwise inequivalent。

5) ③ かつ、$\lambda_r > 0$ ならば、$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は irreducible as $(\mathfrak{g},K)$ module。

6) $r = 2m \quad (1 \leq m \leq [\frac{p}{2}])$ の時、

③ かつ $\lambda_{r-1}+\lambda_r > 0$ ならば、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(Sp(p,q)/Sp(p-m,q))$$

なる discrete series への単射な $(\mathfrak{g},K)$ module homomorphism が存在する。

特に、$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は、unitarizable。

$G = U(p,q)$;$p,\ q \geq 1$ の場合。

$K = U(p) \times U(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする。

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental Cartan subalgebra とすれば、$\mathfrak{h}^c \subset \mathfrak{k}$.

適当な cordinate $\{f_i;\ 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ をとれば、

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i - f_j);\ 1 \leq i < j \leq p+q\}.$$

$$\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i - f_j);\ 1 \leq i < j \leq p \quad \text{or} \quad p+1 \leq i < j \leq q\}.$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく。

$1 \leq r + s \leq p$ なる自然数 $r,\ s$ (一方が 0 でもよい) をとり、fix する。

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \cdots, H_{r+s} \rangle \subset \mathfrak{h}^c$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, $L := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく。

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である。

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を次のルートによって定義する。

$$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}^c) := \{f_i - f_j;\ 1 \leq i \leq r,\ i < j \leq p+q\} \cup \{-f_i + f_j;\ r+1 \leq i \leq r+s,\ i < j \leq p+q\}.$$

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra の Levi 分解を与える。

$\rho := \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{h}^c)^*$

$Q := \frac{1}{2}(p+q-r-s-1) \quad (\geq 0)$

$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) = \frac{1}{2}(r+s)(2p-r-s-1)$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r+s} \lambda_i f_i + \frac{-r+s}{2} \sum_{i=1}^{p+q} f_i \in \mathfrak{t}^* \hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^*$$

Theorem B 0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra K conjugacy class は $r+s+1$ 個（$r+s$ の分割に対応する）

1) $\lambda-\rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる

$\longleftrightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{Z} + Q, \quad (1 \le \forall i \le r+s)$ ——— ①

以後 2)〜6) において すべて ① を仮定する.

2) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r \ge \lambda_{r+s} \ge \lambda_{r+s-1} \ge \cdots \ge \lambda_{r+1} \\ r \ne 0 \text{ ならば } \lambda_r \ge -Q; \quad s \ne 0 \text{ ならば } \lambda_{r+s} \le Q \end{array} \right) $ — ②

$\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_q^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \qquad \text{for } \forall j \ne 0.$

3) ② の下で.

$\mathcal{R}_q^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \ne 0$

$\longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \ge \lambda_{r+s} > \lambda_{r+s-1} > \cdots > \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r-q} \ge Q+1, \quad \lambda_r \ge -Q, \quad \lambda_{r+s-q} \le -Q-1, \quad \lambda_{r+s} \le Q \end{array} \right)$ — ③

但し ③ の後半は それぞれ $r > q$, $r > 0$, $s > q$, $s > 0$ の時のみ課す。

4) ③ を満たす $\mathcal{R}_q^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達は $(\mathfrak{g},K)$ module として pairwise inequivalent。

5) ③ かつ $\lambda_r \ge 0 \ge \lambda_{r+s}$ ならば.

$\mathcal{R}_q^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は irreducible as $(\mathfrak{g},K)$ module。

6) $r = s$ ($= m$ とおく) の時.

③ かつ、$\lambda_r > \lambda_{r+s}$ ならば.

$$\mathcal{R}_q^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(U(p,q)/U(p-m,q))$$

なる discrete series への単射な $(\mathfrak{g},K)$ module homomorphism が存在する。

特に $\mathcal{R}_q^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は unitarizable。

$G = SO_0(p,q)$;$p, q \geq 1$ の場合。

$K = SO(p) \times SO(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする。

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental CSA とし、$\mathfrak{h}^c = (\mathfrak{h}^c \cap \mathfrak{k}) + (\mathfrak{h}^c \cap \mathfrak{p}) \equiv \mathfrak{t}^c + \mathfrak{a}^c$ とおく。

p, q が odd の時. $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}^c = 1$; それ以外の時. $\mathfrak{a}^c = 0$ である。

適当な cordinate $\{f_i ; 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^* = (\mathfrak{t}^c)^* + (\mathfrak{a}^c)^*$ をとると.

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j);\ 1 \leq i < j \leq p+q\} \left(\cup \{\pm f_l\ ;\ 1 \leq l \leq [\tfrac{p+q}{2}]\}\ (p+q:\mathrm{odd}) \right)$$

$$\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j);\ 1 \leq i < j \leq [\tfrac{p}{2}] \text{ or } [\tfrac{p+q}{2}] - [\tfrac{q}{2}] + 1 \leq i < j \leq [\tfrac{p+q}{2}]\} \cup$$
$$\left(\cup \{\pm f_l;\ 1 \leq l \leq [\tfrac{p}{2}]\}\ (p:\mathrm{odd}) \right) \cup \left(\{\pm f_l;\ [\tfrac{p+q}{2}] - [\tfrac{q}{2}] + 1 \leq l \leq [\tfrac{p+q}{2}]\} (q:\mathrm{odd}) \right)$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく。

$1 \leq r \leq [\frac{p}{2}]$ なる自然数 r をとり以後 fix する。

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \cdots, H_r \rangle \subset \mathfrak{t}^c\ (\subset \mathfrak{h}^c)$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, $L := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく。

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である。

$$\mu := \sum_{i=1}^{r} (\tfrac{p+q}{2} - i) f_i \in \mathfrak{t}^*;\quad \mu' := \mu - (p+q-2r) f_r \in \mathfrak{t}^* \left(\subset (\mathfrak{t}^c)^* \subset (\mathfrak{h}^c)^* \right)$$

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を

$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}^c) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}); \langle \alpha, \mu \rangle > 0\}$, $\Delta(\mathfrak{u}',\mathfrak{h}^c) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}); \langle \alpha, \mu' \rangle > 0\}$ で定義する。

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ (resp. $\mathfrak{q}' := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}'$) は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra。

$\rho := \rho(\mathfrak{u})$ (resp. $\rho' := \rho(\mathfrak{u}')$) $\in (\mathfrak{h}^c)^*$ とおくと. $\rho = \mu$ (resp. $\rho' = \mu'$)。

$Q := \frac{p+q}{2} - r - 1\ (\geq -\frac{1}{2})$

$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) = r(p-r-1)$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i \in \mathfrak{t}^*;\quad \lambda' := \lambda - 2\lambda_r f_r \in \mathfrak{t}^* \left(\hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^* \right)$$

Theorem C　0) $\mathfrak{l}$を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の任意の θ stable parabolic subalgebr

$P \neq 2r$ の時．　K の適当な元によって　$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ に conjugate。

$P = 2r$ の時．　K　〃　$\mathfrak{q}$ 又は $\mathfrak{q}'$ に conjugate。

1) $\lambda - \rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる．

$\longleftrightarrow$ $\lambda' - \rho' \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる．

$\longleftrightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{Z} + Q, \quad (1 \leq {}^\forall i \leq r)$ ——— ①

以後 2)～6) において．すべて ① を仮定する．

2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq \min(0, -Q)$ ——— ② ならば．

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'}) = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall j \neq 0.$$

3) ② の下で．

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'}) \neq 0$$

$$\longleftrightarrow \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \geq \min(0, -Q) \quad \& \quad \lambda_{r-q} \geq Q+1 \quad \text{—③}$$

但し．③ の後半の条件は $r > q$ の時のみ課すものとする．

4) ③ を満たす $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$, $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ 達の中で．($\mathfrak{g}$,K) module として同型なものは．

$p \neq 2r$ の時．$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$　(${}^\forall \lambda$) のみ。

$p = 2r$ の時．なし。

5) ③ かつ $\lambda_r \geq 0$ ならば．

$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 及び．$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ は．irreducible as ($\mathfrak{g}$,K) module。

6) ③ かつ $\lambda_r > 0$ ならば．

$p \neq 2r$ の時．　$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(SO_0(p,q)/SO_0(p-r,q))$

$p = 2r$ の時．　$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \oplus \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'}) \hookrightarrow L^2(SO_0(p,q)/SO_0(p-r,q))$

なる．discrete series への単射な ($\mathfrak{g}$,K) module homomorphism が存在する。

<u>Remark</u> i) $G = Sp(p,q)$, $G = U(p,q)$ の場合、Theorem A, B より、$\langle \lambda, \alpha \rangle < 0$ ($^{\exists}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$) を満たす λ (無限個) に対しても、$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ が、reductive space G/H_n の discrete series として実現される事がわかる。(いずれも、$Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal character が singular な場合。) この事は、半単純対称空間 (群自身を含む) の discrete series (又は limit of discrete series) の場合と異なり、[Vogan] (1984) の unitarizability の条件からもはずれており、興味深い。

尚、対称空間 $Sp(p,q)/Sp(m)\times Sp(p-m,q)$, $U(p,q)/U(m)\times U(p-m,q)$, $SO_0(p,q)/SO(m)\times SO_0(p-m,q)$ の discrete series は、Theorem A, B, C の 6) の部分集合で、更に次の条件を満たす λ に対応する $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達で尽される。(C では $r = m$ とおいた)

$G = Sp(p,q)$ の時; Theorem A で $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} + 1$ $(1 \leq {}^{\forall}i \leq m)$

$G = U(p,q)$ の時; Theorem B で $\lambda_i = \lambda_{m+i}$ $(1 \leq {}^{\forall}i \leq m)$

$G = SO_0(p,q)$ の時; Theorem C で $\lambda_{i+1} - \lambda_i \in \mathbb{Z}+1$ $(1 \leq {}^{\forall}i \leq m-1)$

ii) 既約性, vanishing theorem for $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}$ $(j \neq 0)$, nonvanishing of $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}$, unitarizability については、幾つかの一般論 ([Vogan] (1984), [Bien] (1986) 他) から次の場合には、直ちに言える。

a) $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ for $^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$ ならば、

($\leftrightarrow$ Thm A, C では $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$; Thm B では $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+s} \geq \cdots \geq \lambda_{r+1}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \quad ({}^{\forall}j \neq 0) & \text{(cf. Thm A, B, C の2))} \\ \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \text{ は 0 又は unitarizable} & \text{(cf. 〃 の6)の後半)} \end{cases}$$

b) $\langle \lambda + \rho_{\ell}, \alpha \rangle \geq 0$ for ${}^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} \text{Thm A では} & \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq Q \\ \text{Thm B では} & \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq Q \ \ \& \ -Q \geq \lambda_{r+s} \geq \cdots \geq \lambda_{r+1} \\ \text{Thm C では} & \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq \max(0, Q) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は 0 又は既約。 (cf. Thm A, B, C の5))

(但し $\mathcal{D}$-module construction を用いれば、Thm B, C は moment map が birational, normal image を持つ case なので、a) の仮定でも同じ結論が出る。)

c) $\langle \lambda + \rho_{\ell}, \alpha \rangle > 0$ for ${}^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$

$\Longrightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0$ (cf Thm A, B, C の3)の十分条件)

iii) Theorem A, B, C の 3)の十分条件, 5) はそれぞれ [大島-松木] (本報告集), [Vogan] (preprint) が対称空間の discrete series の場合に示した idea を用いる。

iv) Theorem の 2)や6) の後半で見られる様に、vanishing theorem や unitarizability が、canonical Weyl chamber (このRemark ii) a) の条件) を少し越えた λ に対しても成り立つ、といった type の事実は、幾つかの特別な場合に知られている。例えば、[Enright-

Parthasarathy-Wallach-Wolf] (1985) では．'ある種の' parabolic subalgebra (例えば Theorem A では $r=1$ の場合に相当) からの誘導の場合を扱っている。

v) $\mu_\lambda := \lambda + \rho(\mathfrak{u}) - 2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$ が．$\Delta^+(\mathfrak{k})$-dominant の時．

$$\left(\begin{array}{ll}\leftrightarrow \text{Theorem A では．} & \lambda_1 > \cdots > \lambda_r \geq p-q-r+1 \\ \text{Theorem B では．} & \lambda_1 > \cdots > \lambda_r \geq \frac{1}{2}(p-q-r-s+1) \leq -\lambda_{r+s} < \cdots < -\lambda_{r+1} \\ \text{Theorem C では．} & \lambda_1 > \cdots > \lambda_r \geq \frac{1}{2}(p-q-2r)\end{array}\right)$$

μ_λ は．$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ $(\neq 0)$ の unique K-type の highest weight となる。Theorem A，B，C の 6) の設定の下では．μ_λ が $\Delta^+(\mathfrak{k})$-dominant という条件は．対応する discrete series $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(G/H_m)$ が、K^r-closed orbit に台を持つ G^r/P^r 上の measure class の境界値からの'Poisson 変換' によって得られる事に対応する。[Schlichtkrull] (1982) で構成されている discrete series は．この type である。(但し、[Schlichtkrull] (1982) Theorem 8.2~8.4 では．彼の構成したもののうち．Langlands parameter が安定する部分が explicit に書かれている。尚．その記述に若干の misprints がある。)

我々の構成した discrete series (Thm A, B, C の 6)) は．$G=Sp(p,q)$ 及び $G=U(p,q)$ の時は常に．また $G=SO_0(p,q)$ の時は．$p-q-2m\geq 3$ の場合に．Schlichtkrull のそれより真に広い。

Schlichtkrullの構成したdiscrete seriesは、対称空間の(普通の意味の)discrete seriesの場合のFlensted-Jensen typeに相当するが、この場合は、$G = Sp(p,q), U(p,q), SO_o(p,q)$いずれの場合も、$q$が十分大きい時は(i.e. $p-q-2m \geqq 1$ (w.r.t. 2,3))、Flensted-Jensen typeが対応する対称空間のfull discrete seriesになっている事に注意しよう。

vi) 我々がTheorem A, B, Cの6)で述べたdiscrete seriesは、discrete series全体を尽しているとは言っていない。また、重複度は、必ずしも1ではない。

vii) §1のrank condition (2)の仮定を満たさない時にも、$L^2(G/H, \tau)$に有限個、あるいは$L^2(G/H_m)$に無限個のdiscrete seriesが存在する事がある。$H = H_m = K$の時は、その典型的な例である。あるいは、Theorem A 6)で$p = m$の時も、$L^2(Sp(p,q)/Sp(q))$には、無限個のdiscrete seriesが存在する事がBlattner formulaよりわかる。尚、これらのtypeの例は、砂田利一氏が提出した問題(「数学」1987夏季号P239)の否定的な例を与える。

§4 証明について

§2のTheoremは、G/Hの球函数の漸近挙動が、その境界値の台の言葉で表されるという大島の定理([Oshima](1984))が本質的である。尚、L^2-nessの評価は、$P_{-(\lambda+\Lambda+\ell m)}$を施した後で行い、更にformalには現れる可能性のあるいくつかのexponentsの可能性が否定([Kobayashi](1987) §4 p28)されるので、sharpになっている。iv)の最初の等式は、Borel-Weil-Bottの定理と、induction by stagesのspectral sequenceから従う。

§3のTheorem A, B, Cについて: 2)は、壁を越してtranslationした時のspectral sequenceを5)とK-type formulaを用いて調べ、inductiveに示す。(K-type formulaを使わない別の証明も可能)。3)はvanishing theorem 2)があるので、K-type formula (generalized Blattner formula)($R_{\mathfrak{q}}$ではZuckerman, [Vogan](1981); $\mathcal{D}$-module constructionに対しては大島(unpublished), 他[Bien](1986)等)が有効である。⇐)は既に述べた様に、小さなK-typeの重複度の実際の計算が可能であるという大島の発見([大島-松木](本報告集))を使う。⇒)は、対称空間の場合、幾何的な証明が大島-松木によって与えられているが、ここでは、K-type formulaをparabolic inductionとtranslation principleに組み合わせて示される。

4)は、同じ$Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal characterを持つ場合が問題であるが、translation principleを小刻みに繰り返して、いつ消

えるかを調べる事でわかる。また Theorem C の 4) の後半は、K-type の重複度の漸近挙動によって示される。尚 K-type を使わない証明も可能。即ち、$SO(p,q) \curvearrowright \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \oplus \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ の作用が 5) の仮定の下で既約である事が証明され、この場合の $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ が言え、一般にはこれに帰着させる。

5) は、[Vogan] (preprint) の方法が、もう少し広い class の parabolic subalgebra に対して適用可能である事を使う。即ち Diximier algebra の translation principle が、singular infinitesimal character でも、ある方向には望ましく行える事を、$U(\mathfrak{g})$ の ideal theory を使って示す。

◎最後に・・・

G/H は、rank condition を仮定しない一般の対称空間とする。

- $\exists \tau$ (or $\forall \tau$) $\in \widehat{H}$ (unitary な有限次元既約表現)、$L^2(G/H, \tau)$ が無限個の discrete series を持つ $\Leftrightarrow$ rank G/H = rank $K/H \cap K$ か?

  ($\Leftarrow$ は正しい) ($\Rightarrow$ で有限個の discrete series なら反例あり)。
- M を G 共変な G/H 上の fiber bundle with compact fiber とする。「$L^2(M)$ に discrete series が存在する $\Rightarrow$ $L^2(M)$ に discrete series が無限個存在する」は成立つか?
- singular な壁から、より singular な壁に translation する時を組織的に調べる (τ-invariant に相当するもの) 事で Thm A, B, C の 3), 5) を一般化できるか?

References

[Bien](1986) F.Bien, Spherical D-modules and Representations of Reductive Lie Groups, Ph.D.dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1986.

[Enright-Parthasarathy-Wallach-Wolf](1985) T.J.Enright, R.Parthasarathy, N.R.Wallach, and J.A.Wolf, Unitary derived functor module with small spectrum,Acta.Math.,**154**(1985),105-136.

[Flensted-Jensen](1980) M.Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces,Ann.Math.,**111**(1980).253-311.

[Hecht-Miličič-Schmid-Wolf](preprint) H.Hecht,D.Miličič,W.Schmid and J.A.Wolf, Localization and Standard modules for real semisimple Lie Groups I,(preprint).

[Matsuki](1985) 半単純対称空間の軌道分解, 数学 (1986), 232-248

[Oshima](1984) 球関数の漸近挙動について, ユニタリ表現論セミナー報告IV(1984)

[Oshima-Matsuki](1984) T.Oshima,T.Matsuki,A Description of Discrete Series for Semisimple Symmetric Space,Advanced Studies in Pure Math.,**4**(1984),331-390.

[Kobayashi](1987) 対称空間上のベクトル束に実現されるユニタリ表現, 東大修士論文I, 1-56

[Schlichtkrull](1982) H.Schlichtkrull, A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semesimple Lie group,Invent.Math.**68**(1982),497-516.

[Vogan](1981) D.Vogan, Representations of Real Reductive Lie Groups. Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart,(1981).

[Vogan](1984) D.Vogan, Unitarizability of certain series of representation of representations, Ann.Math.,**120**(1984).141-187.

[Vogan](preprint) D.Vogan, Irreducibility of Discrete Series Representations for Semisimple Symmetric Spaces, (preprint),1-46.